۲۲۶-فرض کنید $\vec{a}=\left(\frac{۱}{۲},-۲,۰\right)$ ، $\vec{b}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{c}=(۱,۳,۲)$. زاویه بین بردارهای $\vec{c}+۲\vec{a}$ و $۲\vec{b}-\vec{c}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$

۲) $\frac{\pi}{۳}$

۳) $\frac{۲\pi}{۳}$

۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

۲۲۶-گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{c}+۲\vec{a}=(۱,۳,۲)+۲\left(\frac{۱}{۲},-۲,۰\right)=(۱,۳,۲)+(۱,-۴,۰)=(۲,-۱,۲)\Rightarrow \vec{c}+۲\vec{a}=(۲,-۱,۲)$$

$$۲\vec{b}-\vec{c}=۲(۱,۱,۱)-(۱,۳,۲)=(۲,۲,۲)-(۱,۳,۲)=(۱,-۱,۰)\Rightarrow ۲\vec{b}-\vec{c}=(۱,-۱,۰)$$

نکته: اگر زاویه بین دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{w}$ را α بنامیم آنگاه:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|\times|\vec{w}|}$$

بنابراین:

$$\cos\alpha=\frac{(۲,-۱,۲)\times(۱,-۱,۰)}{|(۲,-۱,۲)|\times|(۱,-۱,۰)|}=\frac{(۲\times۱)+(-۱\times-۱)+(۲\times۰)}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲+۲^۲}\times\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲+۰^۲}}$$

$$=\frac{۳}{۳\times\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۴}$$

۲۲۷-رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۴ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & \alpha \\ -۲ & ۲ & ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ **، کدام است؟**

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۵

۴) بستگی به مقدار α دارد.

۲۲۷- گزینه «۲» صحیح است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۴ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & \alpha \\ -۲ & ۲ & ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{۲r_۱+r_۴} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۴ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & \alpha \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

لذا رتبه ماتریس برابر ۳ است.

توجه. می‌دانیم رتبه (Rank) یک ماتریس تعداد سطرهای (ستون‌های) مستقل خطی ماتریس است. چون ماتریس فقط ۴ سطر دارد پس ($۴ \le$ رتبه) لذا گزینه (۳) نادرست است.

همچنین به جای استفاده از روش بالا، می‌توانیم از بزرگترین زیرماتریس‌های مربعی ماتریس شروع کنیم. اگر دترمینان حداقل یکی از آن‌ها مخالف صفر باشد تعداد سطرهای آن، رتبه ماتریس است. در این مثال:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۴ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & \alpha \\ -۲ & ۲ & ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} , \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱\times۵\times۱ = ۵ \neq ۰$$

و با توجه به اینکه ماتریس ۳ سطر دارد لذا رتبه برابر ۳ می‌باشد.

۲۲۸- به ازای چه تعداد عدد طبیعی $n \le ۱۲۰۱$ تساوی $\sin(n\theta)+i\cos(n\theta)=(\sin\theta+i\cos\theta)^n$ برقرار است؟

۱) ۱۲۰۱

۲) ۵۰۰

۳) ۴۰۰

۴) ۳۰۰

۲۲۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$ie^{-in\theta}=(ie^{-i\theta})^n \Rightarrow ie^{-in\theta}=i^n e^{-in\theta} \Rightarrow i^n=i \Rightarrow i^{n-۱}=۱$$

با توجه به اینکه $i^۴=۱$ لذا باید $(n-۱)$ مضربی از ۴ باشد پس باید مضارب ۴ را در اعداد طبیعی کمتر از ۱۲۰۰ بیابیم یعنی $\left[\frac{۱۲۰۰}{۴}\right]=۳۰۰$.

۲۲۹-دامنه تابع $f(x)=(x+\frac{۱}{|x-۱|})^{x}$ **کدام است؟**

۱) $(۰,+\infty)-\{۱\}$

۲) $(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},+\infty)-\{۱\}$

۳) $(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})-\{۱\}$

۴) $(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},۱)\cup(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲},+\infty)-\{۰\}$

۲۲۹-گزینه «۲» صحیح است.

در توابعی به شکل $(g(x))^{h(x)}$ باید $g(x)>۰$ لذا $x+\frac{۱}{|x-۱|}>۰$.

$$\begin{cases} x>۱ \Rightarrow x+\frac{۱}{x-۱}>۰ & \text{همواره برقرار است.} \\ x<۱ \Rightarrow x+\frac{۱}{۱-x}>۰ \Rightarrow \frac{x(۱-x)+۱}{۱-x}>۰ \Rightarrow \frac{x-x^{۲}+۱}{۱-x}>۰ \end{cases}$$

$$x-x^{۲}+۱=۰ \Rightarrow \Delta=۵ \Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{-۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

x		$\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$		۱		$\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$	
$x-x^{۲}+۱$	-	۰	+		+	۰	-
$۱-x$	+		+	۰	-		-
$\frac{x-x^{۲}+۱}{۱-x}$	-	۰	+	تعریف نشده	-	۰	+

لذا برای $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<x<۱$ کسر مورد نظر مثبت می‌باشد. بنابراین:

$$D_f=(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},۱)\cup(۱,+\infty)=(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},+\infty)-\{۱\}$$

۲۳۰-تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $\tanh x-۰/۵=۰$ **کدام است؟**

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

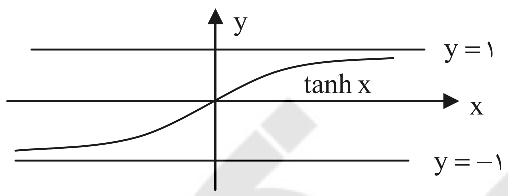
۴) ∞

۲۳۰-گزینه «۲» صحیح است.

می‌دانیم: $\tanh x=\dfrac{e^{۲x}-۱}{e^{۲x}+۱}$ لذا:

$$\frac{e^{۲x}-۱}{e^{۲x}+۱}-\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow\frac{e^{۲x}-۱}{e^{۲x}+۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲e^{۲x}-۲=e^{۲x}+۱\Rightarrow e^{۲x}=۳\Rightarrow ۲x=\ln ۳\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ln ۳$$

نکته: با توجه به نمودار $y=\tanh x$ این تابع یک به یک بوده و مقادیر آن فاصله $(-۱,۱)$ را پوشش می‌دهند، لذا نیازی به حل معادله نیست و معادله $\tanh x=a$ به طوری که $(-۱<a<۱)$ فقط یک جواب دارد.



۲۳۱-معکوس تابع f با ضابطه $f(x)=۴\arcsin\sqrt{۱-x^۲}$ در فاصله $[۰,۱]$ کدام است؟

۱) $y=\arccos ۴x$

۲) $y=\cos ۴x$

۳) $y=\cos\dfrac{x}{۴}$

۴) $y=\arccos\dfrac{x}{۴}$

۲۳۱-گزینه «۳» صحیح است.

$$y=۴\arcsin\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow\frac{y}{۴}=\arcsin\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow\sqrt{۱-x^۲}=\sin\frac{y}{۴}\Rightarrow ۱-x^۲=\sin^۲\frac{y}{۴}\Rightarrow ۱-\sin^۲\frac{y}{۴}=x^۲$$

$$\Rightarrow\cos^۲\frac{y}{۴}=x^۲\Rightarrow x=\cos\frac{y}{۴}\Rightarrow y=\cos\frac{x}{۴}$$

۲۳۲-به ازای $c\geq ۰$، دنباله $\{a_n\}$ را به صورت $n\in\mathbb{N}$ و $a_{n+۱}=\sqrt{c+a_n}$ و $a_۱=۰$ در نظر بگیرید. کدام مورد برای دنباله $\{a_n\}$ درست است؟

۱) صعودی

۲) نزولی

۳) واگرا

۴) نه صعودی و نه نزولی

۲۳۲-گزینه «۱» صحیح است.

با نوشتن چند جمله اول دنباله متوجه می‌شویم که این دنباله صعودی است.

$$۰,\sqrt{c},\sqrt{c+\sqrt{c}},\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}},\dots$$

برای اثبات دقیق‌تر از استقرار استفاده می‌کنیم.

واضح است که $\sqrt{c} \geq ۰$، فرض می‌کنیم که $a_n \geq a_{n-۱}$ نشان می‌دهیم کـه $a_{n+۱} \geq a_n$. چـون $a_n \geq a_{n-۱}$ لـذا $\sqrt{c+a_n} \geq \sqrt{c+a_{n-۱}}$ پس:

$$a_{n+۱} = \sqrt{c+a_n} \geq \sqrt{c+a_{n-۱}} = a_n$$

و بنابراین دنباله صعودی است.

توجه: می‌توانیم مسأله را برای یک مقدار خاص c حل کنیم. مثلاً $c=۱$ در این صورت دنباله به صورت زیر است:

$$۰, ۱, \sqrt{۲}, \sqrt{۱+\sqrt{۲}}, \sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۲}}}, ...$$

که به وضوح صعودی است.

۲۳۳-تابع $f(x) = \dfrac{[x^۲]-x^۲}{|x|+[x]+۲}$ **مفروض است. مقدار** $\lim\limits_{x\to -۳^+} f(x) - \lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) صفر

۳) $-\frac{۱}{۲}$

۴) $-\frac{۵}{۲}$

۲۳۳-گزینه «۳» صحیح است.

وقتی $x \to -۳^+$ آنگاه $x^۲ \to ۹^-$ و لذا $\lim\limits_{x\to -۳^+} [x^۲] = ۸$. همچنین وقتـی $x \to -۳^-$ آنگـاه $x^۲ \to ۹^+$ و لذا $\lim\limits_{x\to -۳^-} [x^۲] = ۹$. بنابراین:

$$\lim_{x\to -۳^+} f(x) = \lim_{x\to -۳^+} \frac{[x^۲]-x^۲}{|x|+[x]+۲} = \frac{۸-(-۳)^۲}{|-۳|+[-۳^+]+۲} = \frac{-۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to -۳^-} f(x) = \lim_{x\to -۳^-} \frac{[x^۲]-x^۲}{|x|+[x]+۲} = \frac{۹-(-۳)^۲}{|-۳|+[-۳^-]+۲} = ۰$$

لذا:

$$\lim_{x\to -۳^+} f(x) + \lim_{x\to -۳^-} f(x) = -\frac{۱}{۲} + ۰ = -\frac{۱}{۲}$$

۲۳۴-فرض کنید $(a>۰)$، $\lim_{x\to ۰}(\frac{\cosh ax}{\cos ax})^{\frac{۱}{x^۲}}=۲$. مقدار a کدام است؟

۱) $\ln ۲$

۲) $\sqrt{\ln ۲}$

۳) $\sqrt{۲}$

۴) ۲

۲۳۴-گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به اینکه $\cos(۰)=۱$ و $\cosh(۰)=۱$ لذا با جایگذاری مقدار x به حالت مبهم ۱^{∞} مـی‌رسـیم و در نتیجـه از هم‌ارزی $a^b \sim e^{b(a-۱)}$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to ۰} e^{\frac{۱}{x^۲}(\frac{\cosh ax}{\cos ax}-۱)}=\lim_{x\to ۰} e^{\frac{\cosh ax-\cos ax}{x^۲\cos ax}}=\lim_{x\to ۰} e^{\frac{(۱+\frac{a^۲x^۲}{۲})-(۱-\frac{a^۲x^۲}{۲})}{x^۲\cos ax}}$$

$$=\lim_{x\to ۰} e^{\frac{a^۲\cancel{x^۲}}{\cancel{x^۲}\cos ax}}=e^{a^۲}$$

با توجه به صورت سوال $e^{a^۲}=۲$ و لذا:

$$a^۲=\ln ۲ \Rightarrow a=\pm\sqrt{\ln ۲}$$

چون طبق صورت سوال $a>۰$ بنابراین $a=\sqrt{\ln ۲}$.

توجه کنید که در این سوال از هم‌ارزی‌های $\cos u \sim ۱-\frac{u^۲}{۲}$ و $\cosh u \sim ۱+\frac{u^۲}{۲}$ استفاده کردیم.

۲۳۵-ارتفاع یک کوه از سطح دریا از رابطه $z=۱۰۰۰-۰/۳x^۲-۰/۲y^۲$ بر حسب متر به دست می‌آید که در آن، جهت مثبت محورهای x و y، به ترتیب به سمت شرق و شـمال اشـاره دارنـد. کوهنـوردی در نقطـه‌ای بـا مختصات $(۵,-۱۰,۹۷۲/۵)$ قرار دارد. او در چه جهتی حرکت کند تا در ارتفاع ثابتی بماند؟

۱) شمال

۲) جنوب

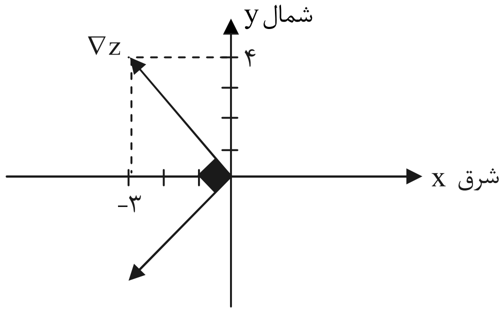
۳) شمال غرب

۴) جنوب غرب

۲۳۵-گزینه «۴» صحیح است.

می‌دانیم در جهت عمود بر گرادیان تابع، تغییرات صفر است. بنابراین گرادیـان تـابع را در نقطـه مـورد نظـر بـه دسـت می‌آوریم، در جهت عمود بر آن تغییرات ارتفاع صفر است.

$$\nabla z=(-۰/۶x,-۰/۴y)\Rightarrow \nabla z(۵,-۱۰,۹۷۲/۵)=(-۰/۶\times ۵,-۰/۴\times -۱۰)=(-۳,۴)$$



لذا در جهت جنوب غرب که عمود بر گرادیان است، تغییرات تابع (ارتفاع) صفر و لذا ارتفاع ثابت است.

۲۳۶- طول، عرض و ارتفاع یک جعبه مستطیلی به ترتیب ۱۵، ۱۰ و ۸ سانتی‌متر است. اگر سرعت تغییرات آنها بر حسب $\frac{cm}{s}$ به ترتیب ۳ افزایش، ۰/۵ کاهش و ۲ افزایش یابد، سرعت تغییرات حجم بر حسب $\frac{cm^3}{s}$ و مساحت کل آن بر حسب $\frac{cm^3}{s}$ به ترتیب کدام است؟

۱) ۲۴۰ و ۲۵۸

۲) ۴۸۰ و ۲۵۸

۳) ۴۸۰ و ۱۸۵

۴) ۲۴۰ و ۱۸۵

۲۳۶- گزینه «۳» صحیح است.

اگر طول، عرض و ارتفاع جعبه را به ترتیب با x، y و z نشان دهیم آنگاه حجم مکعب مستطیل برابر با $V = xyz$ و مساحت کل آن برابر با $S = ۲(xy + xz + yz)$ می‌باشد. اگر از طرفین تساوی‌ها نسبت به t (زمان) مشتق بگیریم سرعت تغییرات حجم (یعنی $\frac{dV}{dt}$) و سرعت تغییرات مساحت کل ($\frac{dS}{dt}$) به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = yz\frac{dx}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + xy\frac{dz}{dt} \\ \frac{dV}{dt} = ۱۰ \times ۸ \times ۳ + ۱۵ \times ۸ \times (-۰/۵) + ۱۵ \times ۱۰ \times ۲ = ۴۸۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = ۲(y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} + z\frac{dx}{dt} + x\frac{dz}{dt} + z\frac{dy}{dt} + y\frac{dz}{dt}) \\ \frac{dS}{dt} = ۲((y+z)\frac{dx}{dt} + (x+z)\frac{dy}{dt} + (x+y)\frac{dz}{dt}) \\ \frac{dS}{dt} = ۲((۱۰+۸) \times ۳ + (۱۵+۸) \times (-۰/۵) + (۱۵+۱۰) \times ۲) = ۱۸۵ \end{cases}$$

۲۳۷-معادله خط مماس بر منحنی $x^۳+۳xy^۲+xy-y^۳=۱$ در نقطه $(۰,-۱)$ کدام است؟

۱) $۲x+۳y=-۳$

۲) $۲x-۳y=۳$

۳) $۳x-۲y=۲$

۴) $۳x+۲y=-۲$

۲۳۷-گزینه «۲» صحیح است.

$$F=x^۳+۳xy^۲+xy-y^۳-۱=۰\Rightarrow y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{۳x^۲+۳y^۲+y}{۶xy+x-۳y^۲}$$

با جایگذاری مختصات نقطه $(۰,-۱)$ خواهیم داشت: $y'=\frac{۲}{۳}$

بنابراین:

معادله خط مماس: $y-(-۱)=\frac{۲}{۳}(x-۰)\ \Rightarrow\ ۲x-۳y=۳$

۲۳۸-نقطه M بر منحنی قطبی $r=\cos ۲\theta$ از $\theta=۰$ حرکت کرده و با سرعت ثابت $\frac{dx}{dt}=۰/۲۵$ بـه محـوری کـه در قطب به محور قطبی عمود است، نزدیک می‌شود. نقطه M با کدام سرعت در $\theta=\frac{\pi}{۶}$ به قطب نزدیک می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۷}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

۲۳۸-گزینه «۳» صحیح است.

در نقطه $\theta=\frac{\pi}{۶}$ روی منحنی قطبی، $r=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

$$r=\cos ۲\theta\ \Rightarrow\ \frac{dr}{dt}=-۲\sin ۲\theta\,\frac{d\theta}{dt}\ \xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{۶}}\ \boxed{\frac{dr}{dt}=-\sqrt{۳}\,\frac{d\theta}{dt}}$$

از طرفی می‌دانیم در مختصات قطبی $x=r\cos\theta$. با مشتق‌گیری از طرفین این تساوی نسبت به t خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta+r(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}\ \xrightarrow[\theta=\frac{\pi}{۶},\ \frac{dx}{dt}=-\frac{۱}{۴}]{r=\frac{۱}{۲}}\ -\frac{۱}{۴}=\boxed{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{dr}{dt}-\frac{۱}{۴}\frac{d\theta}{dt}}$$

$$\begin{cases}\frac{dr}{dt}=-\sqrt{۳}\,\frac{d\theta}{dt}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{dr}{dt}-\frac{۱}{۴}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{۱}{۴}\end{cases}\ \Rightarrow\ \frac{dr}{dt}=-\frac{\sqrt{۳}}{۷}\ ,\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{۱}{۷}$$

۲۳۹-ماکزیمم تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{(x^۲+۱)^۲(x^۲+۳)}}{۳x^۲+۴}$ چه ضریبی از $\sqrt[3]{۱۶۰}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$

۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۳۹-گزینه «۱» صحیح است.

برای به دست آوردن اکسترمم‌های تابع باید از آن مشتق بگیریم. با توجه به شکل تابع (که حاصل‌ضرب و تقسیم پرانتزها می‌باشد) از مشتق لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

$$\ln(f(x))=\frac{۲}{۳}\ln(x^۲+۱)+\frac{۱}{۳}\ln(x^۲+۳)-\ln(۳x^۲+۴)$$

از طرفین تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲x}{x^۲+۱}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲x}{x^۲+۳}-\frac{۶x}{۳x^۲+۴}$$

بنابراین:

$$f'(x)=f(x)\times\left(\frac{۴x}{۳(x^۲+۱)}+\frac{۲x}{۳(x^۲+۳)}-\frac{۶x}{۳x^۲+۴}\right)\Rightarrow f'(x)=۲x\,f(x)\times\frac{۱-۳x^۲}{۳(x^۲+۱)(x^۲+۳)(۳x^۲+۴)}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\ \Rightarrow\ f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{۳}}{۴}\\ ۱-۳x^۲=۰\Rightarrow x^۲=\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{۱۶۰}{۲۷}}}{۵}=\dfrac{۱}{۱۵}\sqrt[3]{۱۶۰}\end{cases}$$

۲۴۰-تعداد نقاطی که تابع $f(x)=\big||x|-۱\big|$ در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است، کدام‌اند؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۲۴۰-گزینه «۴» صحیح است.

$$\begin{cases}x=۰\\ |x|-۱=۰\Rightarrow|x|=۱\ \Rightarrow\ x=\pm۱\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1) & x<-1\\ x+1 & -1<x<0\\ 1-x & 0<x<1\\ x-1 & 1<x\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ 1 & -1<x<0\\ -1 & 0<x<1\\ 1 & 1<x\end{cases}$$

بنابراین در نقاط $x=0\ ,\ 1\ ,\ -1$ مقدار مشتق چپ و راست برابر نمی‌باشد و لذا در این نقاط تابع مشتق‌ناپذیر است.

توجه:

$$f'_-(-1)=-1\ ,\ f'_+(-1)=1\ ,\ f'_-(0)=1\ ,\ f'_+(0)=-1\ ,\ f'_-(1)=-1\ ,\ f'_+(1)=1$$

۲۴۱-اگر تابع f در $x=3$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2f(3)-9f(x)}{x-3}$ کدام است؟

۱) $3f(3)-9f'(9)$

۲) $9f(3)-6f'(3)$

۳) $6f(3)-9f'(3)$

۴) $9f(9)-3f'(3)$

۲۴۱-گزینه «۳» صحیح است.

با جایگذاری $x=3$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم و با توجه به مشتق‌پذیر بودن f در $x=3$ برای رفع ابهام از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\text{حاصل حد}\overset{H}{=}\lim_{x\to 3}\frac{2x\,f(3)-9f'(x)}{1}=6f(3)-9f'(3)$$

۲۴۲-فرض کنید $I=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{n^2}}\sqrt{x^4+\cos x^4+2}=dx$ و $J=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x^{10}+x+4}\ dx$. با استفاده از قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها، کدام مورد برای همگرایی یا واگرایی I و J درست است؟

۱) I و J همگرا

۲) I و J واگرا

۳) I واگرا و J همگرا

۴) I همگرا و J واگرا

۲۴۲-گزینه «۴» صحیح است.

اگر $0\le x\le\frac{1}{n^2}\le 1$ آنگاه:

$$\sqrt{x^4+\cos x^4+2}\le\sqrt{1+1+2}=2\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{n^2}}\sqrt{x^4+\cos x^4+2}\ dx\ \le\int_0^{\frac{1}{n^2}}2dx=2x\Big|_0^{\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{n^2}$$

از طرفی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ یک سری همگراست لذا طبق آزمون مقایسه، I نیز همگراست. همچنین:

$$0\le x\le \frac{1}{n}\le 1\Rightarrow 2=\sqrt{4}\le\sqrt{x^{10}+x+4}$$

بنابراین:

$$\int_0^{\frac{1}{n}}2dx\le\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x^{10}+x+4}\,dx\Rightarrow\frac{2}{n}\le\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x^{10}+x+4}\,dx$$

چون $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}$ یک سری واگراست لذا طبق آزمون مقایسه، J نیز واگراست.

۲۴۳-مختصات نزدیک‌ترین نقطهٔ واقع بر فصل مشترک رویه‌های $x-y+2z=5$ و $z^2=2x^2+2y^2$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $(\frac{5}{6},-\frac{5}{6},\frac{5}{3})$

۲) $(-\frac{5}{2},\frac{5}{2},5)$

۳) $(\frac{5}{2},-\frac{5}{2},5)$

۴) $(-\frac{5}{6},\frac{5}{6},\frac{5}{3})$

۲۴۳-گزینه «۱» صحیح است.

روش اول: گزینه‌های (۳) و (۴) در شرط $x-y+2z=5$ صدق نمی‌کنند.

فاصله نقطه $(\frac{5}{6},-\frac{5}{6},\frac{5}{3})$ تا مبدأ $=\sqrt{(\frac{5}{6})^2+(-\frac{5}{6})^2+(\frac{5}{3})^2}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

فاصله نقطه $(-\frac{5}{2},\frac{5}{2},5)$ تا مبدأ $=\sqrt{(-\frac{5}{2})^2+(\frac{5}{2})^2+5^2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$

و لذا نقطه $(\frac{5}{6},-\frac{5}{6},\frac{5}{3})$ به مبدأ نزدیکتر است.

روش دوم: هدف یافتن نقطه $M(x,y,z)$ می‌باشد که مختصات آن در شرایط داده شده صدق کرده و مقدار $f_1(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (فاصله نقطه M تا مبدأ) در آن می‌نیمم باشد. به طور معادل، باید می‌نیمم تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را با شرایط $g(x,y,z)=x-y+2z-5=0$ و $h(x,y,z)=2x^2+2y^2-z^2=0$ به دست آوریم. برای این منظور از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}f=x^2+y^2+z^2\\ g=x-y+2z-5=0\\ h=2x^2+2y^2-z^2=0\end{cases}$$

از معادله g داریم $z=\frac{۱}{۲}(۵-x+y)$ بنابراین با قرار دادن آن در تابع f و قید h خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f=x^{۲}+y^{۲}+\frac{۱}{۴}(۵-x+y)^{۲} \\ h=۲x^{۲}+۲y^{۲}-\frac{۱}{۴}(۵-x+y)^{۲}=۰ \end{cases}$$

طبق دستگاه لاگرانژ:

$$\frac{f_x}{h_x}=\frac{f_y}{h_y} \Rightarrow \frac{۲x-\frac{۱}{۲}(۵-x+y)}{۴x-\frac{۱}{۲}(۵-x+y)}=\frac{۲y+\frac{۱}{۲}(۵-x+y)}{۴y+\frac{۱}{۲}(۵-x+y)}$$

$$\Rightarrow (x+y)(۵-x+y)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۵-x+y=۰ & (۱) \\ x+y=۰ & (۲) \end{cases}$$

رابطه (۱) غیرقابل قبول است زیرا با جایگذاری آن در g، $z=۰$ به دست می‌آید و در این صورت طبق تساوی مربوط به h، $x=y=۰$ و نقطه حاصل همین $(۰,۰,۰)$ روی g قرار ندارد. با جایگذاری $y=-x$ در معادله قید h داریم:

$$\begin{cases} -۲x=۵ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow y=\frac{۵}{۲}, z=۵ \\ \text{یا} \\ ۶x=۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۶} \Rightarrow y=-\frac{۵}{۶}, z=\frac{۵}{۳} \end{cases}$$

و نقطه $(\frac{۵}{۶},-\frac{۵}{۶},\frac{۵}{۳})$ به مبدأ نزدیک‌تر است.

۲۴۴-با استفاده از حد مجموع ریمان، مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=۱}^{n}\frac{k^{۲}}{n^{۳}+k^{۳}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\ln ۲}{۳}$

۲) $\frac{\ln ۳}{۲}$

۳) $\ln ۲$

۴) $\ln ۳$

۲۴۴-گزینه «۱» صحیح است.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{k^{۲}}{n^{۳}+k^{۳}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{k^{۲}}{n^{۳}(۱+\frac{k^{۳}}{n^{۳}})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{(\frac{k}{n})^{۲}}{۱+(\frac{k}{n})^{۳}}=\int_{۰}^{۱}\frac{x^{۲}}{۱+x^{۳}}dx$$

$$=\frac{۱}{۳}\ln|۱+x^{۳}|\Big|_{x=۰}^{۱}=\frac{۱}{۳}\ln ۲-\frac{۱}{۳}\ln ۱=\frac{\ln ۲}{۳}$$

۲۴۵-مساحت ناحیه بیرون منحنی $x^۲+y^۲=۲y$ و درون منحنی $r=۳-\sin\theta$ واقع در ربع اول صفحه مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۱۵\pi-۱۶}{۸}$

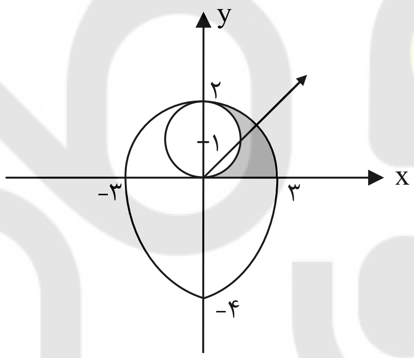
۲) $\frac{۱۵\pi-۲۴}{۸}$

۳) $۲\pi-۳$

۴) $۲(\pi-۱)$

۲۴۵-گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به شکل باید مساحت ناحیه هاشور خورده را به دست آوریم. معادله قطبی دایره $x^۲+y^۲=۲y$ به صورت $r=۲\sin\theta$ می‌باشد. لذا:



$$(\text{مساحت})\ S=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}((۳-\sin\theta)^۲-(۲\sin\theta)^۲)\,d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(۹-۶\sin\theta-۳\sin^۲\theta)\,d\theta=\frac{۳}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(۳-۲\sin\theta-\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲})\,d\theta$$

$$=\frac{۳}{۲}(۳\theta+۲\cos\theta-\frac{۱}{۲}\theta+\frac{۱}{۴}\sin ۲\theta)\Big|_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۳}{۲}(\frac{۵\pi}{۴}-۲)=\frac{۱۵\pi-۲۴}{۸}$$

۲۴۶-مقدار $\int_{۰}^{+\infty}\frac{e^{-۲x}-e^{-۵x}}{x}dx$ کدام است؟

۱) $-\ln ۱۰$

۲) $-\ln ۵$

۳) $\ln\frac{۲}{۵}$

۴) $\ln\frac{۵}{۲}$

۲۴۶-گزینه «۴» صحیح است.

طبق فرمول $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$ داریم:

$$\text{حاصل انتگرال} = \ln \frac{5}{2}$$

۲۴۷-طول منحنی $f(x)=\int_{0}^{x} \sqrt{\sin t}\, dt$ در بازه $[0,\pi]$، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$

۲) ۲

۳) $2\sqrt{2}$

۴) ۴

۲۴۷-گزینه «۴» صحیح است.

ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x)=\sqrt{\sin x}$$

$$(\text{طول قوس})\ L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx \Rightarrow L=\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\, dx$$

$$=\int_{0}^{\pi}\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\, dx=\int_{0}^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right| dx$$

$$=\int_{0}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\, dx=(-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2})\Big|_{x=0}^{\pi}=4$$

توجه:

$$0\le x\le \pi \Rightarrow 0\le \frac{x}{2}\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{x}{2},\cos\frac{x}{2}\ge 0$$

۲۴۸-مقدار $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{e^{y}\, dy\, dx}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}(e-1)$

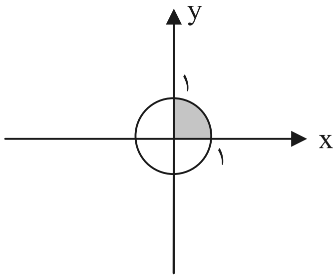
۲) $\frac{\pi e}{3}$

۳) $\pi(e-1)$

۴) πe

۲۴۸-گزینه «۱» صحیح است.

با توجه به حدود انتگرال، ناحیه انتگرال‌گیری، داخل دایره واحد واقع در ربع اول می‌باشد. چون انتگرال داخلی قابل حل نیست لذا از تعویض ترتیب انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم.



$$I=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}}\frac{e^y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\int_0^1 e^y\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}}dy$$

$$=\int_0^1 e^y(\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(0))\,dy=\frac{\pi}{2}\int_0^1 e^y dy=\frac{\pi}{2}e^y\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(e-1)$$

توجه: در حل انتگرال داخلی از فرمول $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\sin^{-1}(\frac{u}{a})$ استفاده کردیم. یعنی:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)-x^2}}dx=\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\right)$$

۲۴۹-حجم ناحیه محصور به رویه $r=2\cos\theta$ و داخل کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲، کدام است؟

۱) $\frac{16\pi}{9}$

۲) $\frac{16(3\pi-4)}{9}$

۳) $\frac{16\pi}{3}$

۴) $\frac{16(3\pi-4)}{3}$

۲۴۹-گزینه «۲» صحیح است.

روش اول:

$$r=2\cos\theta \overset{\times r}{\Rightarrow} r^2=2r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2=2x$$

یعنی رویه داده شده استوانه $x^2+y^2=2x$ می‌باشد. می‌دانیم حجم ناحیه محصور داخل کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و داخل استوانه $x^2+y^2=ax$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$V=\frac{2a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right) \quad (\text{حجم})$$

لذا:

$$V = \frac{۲(۲)^۳}{۳}(\pi - \frac{۴}{۳}) = \frac{۱۶(۳\pi - ۴)}{۹} \quad \text{(حجم)}$$

روش دوم: با توجه به اینکه معادله کره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ به صورت $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ می‌باشد، داریم:

$$V = \int_{\theta=-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{r=۰}^{r=۲\cos\theta} \int_{z=-\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}^{z=\sqrt{۴-x^۲-y^۲}} r\,dz\,dr\,d\theta = \quad \text{(حجم)}$$

$$= ۲\int_{\theta=-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{r=۰}^{۲\cos\theta} r\sqrt{۴-r^۲}\, dr\, d\theta = \frac{۲}{۳}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} -(۴-r^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^{۲\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{۱۶}{۳}\int_{\theta=-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (۱-|\sin^۳\theta|)d\theta = \frac{۳۲}{۳}\int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} (۱-\sin\theta\times(۱-\cos^۲\theta))d\theta$$

$$= \frac{۳۲}{۳}\int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} (۱-\sin\theta+\sin\theta\cos^۲\theta)\,d\theta = \frac{۳۲}{۲}(\theta+\cos\theta-\frac{\cos^۳\theta}{۳})\Bigg|_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۳۲}{۳}(\frac{\pi}{۲}-\frac{۲}{۳}) = \frac{۱۶(۳\pi-۴)}{۹}$$

۲۵۰-مساحت سطح غیرمسطح $\phi = \frac{\pi}{۴}$ محدود به صفحه $z = ۱$، در مختصات کروی، کدام است؟

۱) π

۲) $\sqrt{۲}\pi$

۳) ۲π

۴) $۲\sqrt{۲}\pi$

۲۵۰-گزینه «۲» صحیح است.

سطح $\phi = \frac{\pi}{۴}$ در مختصات کروی، مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ می‌باشد. از طرفی در مخروط $z = \sqrt{a(x^۲ + y^۲)}$ داریم: $ds = \sqrt{a+۱}\ dx\,dy$ لذا $ds = \sqrt{۲}\ dx\,dy$. چون تصویر مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ محدود به صفحه $z = ۱$ بر صفحه xy داخل دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ می‌باشد پس:

$$\text{مساحت} = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{۲}\,dx\,dy = \sqrt{۲}\times(\text{مساحت } D) = \pi\sqrt{۲}$$

۲۵۱-مقدار $\iint_D \tan^{-1}(\frac{y}{x})\,dx\,dy$ **که در آن** $D=\left\{(x,y): \cdot \le a^{۲} \le x^{۲}+y^{۲} \le b^{۲}, \frac{x}{\sqrt{۳}} \le y \le \sqrt{۳}x\right\}$ **کدام گزینه است؟**

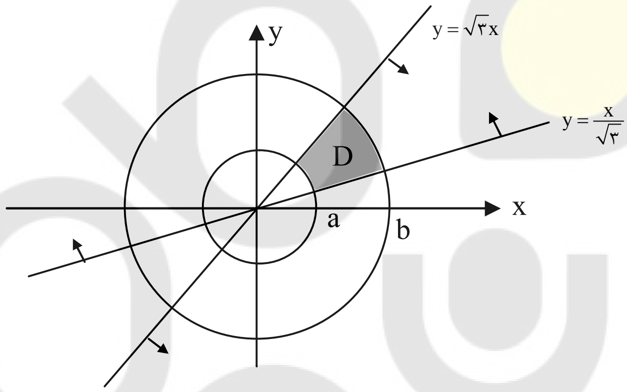
۱) $\frac{\pi^{۲}}{۴۸}(b^{۲}-a^{۲})$

۲) $\frac{\pi^{۲}}{۴۸}(b-a)^{۲}$

۳) $\frac{\pi^{۲}}{۱۲}(b^{۲}-a^{۲})$

۴) $\frac{\pi^{۲}}{۱۲}(b-a)^{۲}$

۲۵۱-گزینه «۱» صحیح است.



$$y=\sqrt{۳}x \Rightarrow \frac{y}{x}=\sqrt{۳} \Rightarrow \tan\theta=\sqrt{۳} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۳}$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \tan\theta=\frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۶}$$

با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$I=\int_{\theta=\frac{\pi}{۶}}^{\theta=\frac{\pi}{۳}}\int_{r=a}^{r=b}\theta\times r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\theta\,d\theta\times\int_{r=a}^{b}r\,dr=\frac{\theta^{۲}}{۲}\Bigg|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\times\frac{r^{۲}}{۲}\Bigg|_a^b=\frac{۱}{۲}(\frac{\pi^{۲}}{۹}-\frac{\pi^{۲}}{۳۶})\times\frac{۱}{۲}(b^{۲}-a^{۲})$$

$$=\frac{\pi^{۲}}{۴۸}(b^{۲}-a^{۲})$$

۲۵۲-مقدار $\iint_S e^z dS$ که در آن، S بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که بین صفحات $z=a$ و $z=b$ قرار گرفته، $(0<a<b)$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}\pi(be^b-ae^a)$

۲) $2\sqrt{2}\pi(ae^b+be^a)$

۳) $2\sqrt{2}\pi((a+1)e^b-(b+1)e^a)$

۴) $2\sqrt{2}\pi((b-1)e^b-(a-1)e^a)$

۲۵۲-گزینه «۴» صحیح است.

برای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ داریم $dS=\sqrt{2}dx\,dy$. از برخورد مخروط با صفحات $z=a$ و $z=b$ دایره‌های $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+y^2=b^2$ به دست می‌آید. چون $z=\sqrt{x^2+y^2}$ لذا تابع داخل انتگرال به صورت $e^z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ درمی‌آید و ناحیه انتگرال‌گیری بین دو دایره $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+y^2=b^2$ قرار دارد لذا از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$\iint_S e^z dS=\iint e^{\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{2})\,dx\,dy=\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b} re^r\,dr\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\times 2\pi\int_{r=a}^{b} re^r dr=2\sqrt{2}\pi(re^r-e^r)\Big|_{r=a}^{b}$$

$$=2\sqrt{2}\pi((be^b-e^b)-(ae^a-e^a))=2\sqrt{2}\pi((b-1)e^b-(a-1)e^a))$$

۲۵۳-فرض کنید C منحنی حاصل از برخورد صفحه $y+z=2$ با استوانه $x^2+y^2=1$ در جهت مثلثاتی باشد. اگر $\vec{F}(x,y,z)=(-\alpha y^2,\alpha x,z^2\cos z)$ و $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=2\pi$، آنگاه مقدار α، کدام است؟

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

۴) صفر

۲۵۳-گزینه «۴» صحیح است.

با توجه به اینکه C یک منحنی بسته می‌باشد برای محاسبه $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم.

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\alpha y^2 & \alpha x & z^2\cos z\end{vmatrix}=(0,0,\alpha+2\alpha y)$$

چون منحنی C مرز صفحه S با معادله $g(x,y,z)=y+z-۲=۰$ می‌باشد بنابراین:

$$\vec{n}dS=\pm\frac{\nabla g}{\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|}dx\,dy=\pm\frac{(۰,۱,۱)}{۱}dx\,dy$$

و چون خم C در جهت مثلثاتی است لذا مولفه سوم آن مثبت است و در نتیجه علامت مثبت را انتخاب می‌کنیم.

همچنین تصویر ناحیه داخل C در صفحه xy، دایره $x^۲+y^۲=۱$ می‌باشد. پس طبق قضیه استوکس:

$$۲\pi=\oint_C\vec{F}.d\vec{r}=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}\,dS=\iint_D(۰,۰,\alpha+۲\alpha y).(۰,۱,۱)dxdy$$

$$=\iint_D \qquad dx\,dy=\alpha\iint_D dx\,dy+۲\alpha\iint_D y\,dx\,dy=$$

$$=\alpha\times(D\ \text{مساحت})=\pi\alpha\Rightarrow ۲\pi=\pi\alpha\Rightarrow\alpha=۲$$

(دقت کنید که تابع تحت انتگرال نسبت به y فرد و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به y زوج است. لذا حاصل انتگرال صفر است.)

۲۵۴-اگر S، سطح کره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ باشد، مقدار انتگرال زیر، کدام است؟

$$\iint_S\left(x(۲x+۳e^{z^۲})-y(e^{x^۲}+y)+z(۲z+\cos ۲y)\right)d\sigma$$

۱) صفر

۲) ۳π

۳) $\frac{۷\pi}{۲}$

۴) ۴π

۲۵۴-گزینه «۴» صحیح است.

چون عبارت $۳xe^{z^۲}$ نسبت به متغیر x فرد است و سطح S یعنی کره $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ نسبت به محور xها تقارن دارد لذا حاصل انتگرال این بخش از تابع روی S برابر صفر است. به طور مشابه،

$$\iint_S ye^{x^۲}d\sigma=\iint_S z\cos(۲y)d\sigma=۰$$

از طرفی روی کره $S:x^۲+y^۲+z^۲=۱$ داریم:

$$\iint_S(x^۲+y^۲+z^۲)d\sigma=\iint_S ۱d\sigma=S\ \text{مساحت}=۴\pi$$

و لذا با توجه به تقارن،

$$\iint_S x^۲d\sigma=\iint_S y^۲d\sigma=\iint_S z^۲d\sigma=\frac{۴\pi}{۳}$$

بنابراین:

$$I=\iint_S (۲x^۲-y^۲+۲z^۲)d\sigma = ۲\times\frac{۴\pi}{۳}-\frac{۴\pi}{۳}-۲\times\frac{۴\pi}{۳}=۴\pi$$

۲۵۵-برای سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۲^n \sin^{۲n}(x)}{n}$ کدام مورد درست است؟

۱) در بازه $\left[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}\right]$، همگرای مطلق است.

۲) در بازه $(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$، همگرای مطلق و در $x=-\frac{\pi}{۴}$ همگرای مشروط است.

۳) در بازه $(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$، همگرای مطلق و در $x=\pm\frac{\pi}{۴}$ همگرای مشروط است.

۴) در بازه $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$، همگرای مطلق و در $x=\frac{\pi}{۴}$ همگرای مشروط است.

۲۵۵-گزینه «۳» صحیح است.

با توجه به گزینه‌ها، کافی است فقط همگرایی مطلق و مشروط تابع را در نقاط $x=\frac{\pi}{۴}$ و $x=-\frac{\pi}{۴}$ بررسی کنیم.

$$x=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \sum_{n=۱}^{+\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۲^n\sin^{۲n}(\frac{\pi}{۴})}{n}=\sum_{n=۱}^{+\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۲^n(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۲n}}{n}$$

$$=\sum_{n=۱}^{+\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۲^n\times\frac{۱}{۲^n}}{n}=\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n}$$

که به وضوح همگرای مشروط است.

با توجه به اینکه $\sin^{۲n}(\frac{\pi}{۴})=\sin^{۲n}(-\frac{\pi}{۴})$ به طور مشابه سری داده شده در $x=-\frac{\pi}{۴}$ نیز همگرای مشروط است.